I Krive u prostoru

1 Krive u prostoru i putevi

Kriva L u trodimenzionalnom euklidskom prostoru se može prikazati parametarski u skalarnom ili vektorskom obliku:

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I; \\ z = z(t) \end{cases} \qquad L : \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in I$$

gdje je $I \subset \mathbb{R}$ interval u širem smislu (otvoren, zatvoren, poluotvoren, konačan ili beskonačan), a funkcije $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ neprekidne, diferencijabilne ili neprekidno-diferencijabilne, zavisno od potrebe.

1. Pokazati da kriva L: $x = \dfrac{t}{1+t^2+t^4}$, $y = \dfrac{t^2}{1+t^2+t^4}$, $z = \dfrac{t^3}{1+t^2+t^4}$, $t \in \mathbb{R}$, leži na nekoj sferi sa centrom $C(0; \frac{1}{2}; 0)$.

$[x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + z^2 = R^2]$

2. Pokazati da kriva L: $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos t$, $(a, b, c > 0)$, leži na nekom elipsoidu. $[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1]$

3. Date su jednačine krive u prostoru u vektorskom obliku

(a) $\vec{r} = u\vec{i} + u^2\vec{j}$;

(b) $\vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j}$;

(c) $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + b\sin\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$, $b > 0$;

Utvrditi o kojima krivima je riječ. $[(a)$ parabola; (b) prava; (c) elipsa$]$

4. Pokazati da kriva

$$L : \begin{cases} x = \sin 2\varphi \\ y = 1 - \cos 2\varphi \\ z = 2\cos\varphi \end{cases}$$

leži na sferi. $[x^2 + y^2 + z^2 = 4]$

Kriva L može još biti zadata i na sljedeće načine: u eksplicitnom ili implicitnom obliku

$$L : \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases} \text{ gdje je } x \in I \text{ (eksplicitni oblik)}; \qquad L : \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \text{ (implicitni oblik)}$$

5. Kriva L je data kao presjek dvije površi

$$L : \begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

Krivu L napisati u parametarskom obliku.

$[x = \frac{a}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t; y = \frac{b}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\sin t; z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t; t \in [0, 2\pi)]$

6. Odrediti projekciju krive L: $z = x^2 - y^2$, $x + y - z = 0$ na ravan xOy.

$[x + y = 0; z = 0 \quad \text{i} \quad x - y - 1 = 0; z = 0]$

7. Odrediti projekciju krive L: $x = y^2 + z^2$, $x - 2y + 4z - 4 = 0$ na ravan yOz.
[$(y-1)^2 + (z-2)^2 = 3; x = 0$]

8. Data je kriva

$$L : x = a\cos^2 u,\ y = a\sin u\cos u,\ z = a\sin u$$

Pokazati da kriva L leži u presjeku jedne lopte i cilindra čija je generatrisa paralelna osi $0z$ i odrediti jednačine tih površi. [$L : x^2 + y^2 + z^2 = a^2; x^2 + y^2 = ax$]

9. Pokazati da je kriva $\vec{r} = \sin 2t\vec{i} + (1 - \cos 2t)\vec{j} + 2\cos t\vec{k}$ presjek paraboličkog i kružnog valjka (cilindra). [$x^2 + (y-1)^2 = 1; y = -\frac{1}{2}z^2 + 2$]

10. Data je kriva linija

$$\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c} \ \ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ konstantni vektori})$$

Pokazati da kriva leži u ravni, čiju jednačinu treba odrediti.
[$A(x - c_1) - B(y - c_2) + C(z - c_3) = 0$ gdje su $A = a_2b_3 - a_3b_2$,...]

11. Data je kriva linija

$$\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c} \ \ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ konstantni vektori})$$

Pokazati da kriva leži u ravni, čiju jednačinu treba odrediti. Utvrditi o kojoj je krivoj riječ.
[parabola, za slučaj kada vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni]

12. Kriva je određena kao presjek sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

i cilindra

$$x^2 + y^2 = ax$$

Pokazati da je projekcija krive na xOz-ravan dio parabole. Napisati jednačinu krive u parametarskom obliku.
[$x = -\frac{1}{a}z^2 + a$; $C : x = a\cos^2 t, y = a\sin t\cos t, z = a\sin t, 0 \le t \le 2\pi$]

Neka je $\vec{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$

$$t \to (x(t), y(t), z(t))$$

vektor-vrijednostna funkcija, neprekidna na kompaktnom intervalu $[a, b]$ u $\mathbb{R}$. Kako t uzima vrijednosti iz intervala $[a, b]$ to vrijednost funkcije $\vec{f}$ ostavljaju trag kao skup tački u $\mathbb{R}^3$ koje zovemo graf funkcije $\vec{f}$ ili kriva opisana sa $\vec{f}$. Kriva je kompaktan i povezan podskup od $\mathbb{R}^3$ zato što je neprekidna slika kompaktnog intervala. Samu funkciju $\vec{f}$ nekad zovemo put.

Često je korisno da zamislimo krivu kao trag čestice koja se pomjera. Interval $[a, b]$ tada možemo tumačiti kao vremenski interval a vektor $\vec{f}(t)$ kao određena pozicija čestice u prostoru u datom trenutku t. Ako prihvatimo ovo tumačenje, funkciju $\vec{f}$ često zovemo kretanje.

Različiti putevi mogu ostavljati iste krive. Npr. dvije kompleksno vrijednosne funkcije $f(t) = e^{2\pi i t}$, $g(t) = e^{-2\pi i t}$ za $0 \le t \le 1$, kao trag ostavljaju jedinični krug $x^2 + y^2 = 1$, ali ove tačke su posjećene u obrnutom smjeru. Isti krug se nacrta pet puta uz pomoć funkcije $h(t) = e^{10\pi i t}$, $0 \le t \le 1$.

13. Objasniti na konkretnom primjeru kako bi ovo shvatanje krivih linija i puteva u prostoru mogli iskoristiti u programiranju. [animiranje kretnji, reklame,...]

(#) Pokazati da kriva $L: x = \dfrac{t}{1+t^2+t^4}, \ y = \dfrac{t^2}{1+t^2+t^4},$

$z = \dfrac{t^3}{1+t^2+t^4}$, $t \in \mathbb{R}$ leži na nekoj sferi sa centrom

$C(0, \frac{1}{2}, 0)$.

Rj.

Opšti oblik jednačine sfere sa centrom $C(0, \frac{1}{2}, 0)$ poluprečnika R je

$$x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 + z^2 = R^2.$$

Ako uvrstimo našu krivu dobićemo

$$\left(\frac{t}{1+t^2+t^4}\right)^2 + \left(\frac{t^2}{1+t^2+t^4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{t^3}{1+t^2+t^4}\right)^2 =$$

$$\frac{t^2}{(1+t^2+t^4)^2} + \frac{\left(\overbrace{2t^2 - (1+t^2+t^4)}^{2t^2-1-t^2-t^4}\right)^2}{4(1+t^2+t^4)^2} + \frac{t^6}{(1+t^2+t^4)^2} =$$

$$= \frac{4t^2 + (-1+t^2-t^4)^2 + 4t^6}{4(1+t^2+t^4)^2} = \frac{4t^2 + 1 - t^2 + t^4 - t^2 + t^4 - t^6 + t^4 - t^6 + t^8 + 4t^6}{4(1+t^2+t^4)^2}$$

$$= \frac{\overbrace{1 + 2t^2 + 3t^4 + 2t^6 + t^8}^{=(1+t^2+t^4)^2}}{4\underbrace{(1+t^2+t^4)^2}} = \frac{1}{4}$$

$= 1+t^2+t^4+t^2+t^4+t^6+t^4+t^6+t^8 = 1+2t^2+3t^4+2t^6+t^8$

Data kriva leži na sferi sa centrom $(0, \frac{1}{2}, 0)$ poluprečnika $R = \frac{1}{2}$.

(#) Pokazati da kriva $L: x = a\sin^2 t,\ y = b\sin t\cos t,\ z = c\cos t$ $(a, b, c > 0)$ leži na nekom elipsoidu.

Rj.

Jednačina elipsoida je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Pa izračunajmo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

$$\frac{(a\sin^2 t)^2}{a^2} + \frac{(b\sin t\cos t)^2}{b^2} + \frac{(c\cos t)^2}{c^2} =$$

$$= \sin^4 t + \sin^2 t\cos^2 t + \cos^2 t =$$

$$= \sin^2 t\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1} + \cos^2 t = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

(#) Date su jednačine krive u prostoru u vektorskom obliku

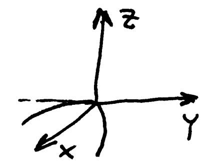
a) $\vec{r} = u\vec{i} + u^2\vec{j}$

b) $\vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j}$

c) $\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a>0$, $b>0$

Utvrditi o kojim krivima je riječ.

Rj a) $\vec{r} = u\vec{i} + u^2\vec{j} = (u, u^2, 0)$



$x = u$ $\quad$ $x^2 = u^2$

$y = u^2$ $\quad$ $y = u^2$ $\Big\} \Rightarrow y = x^2$ $\qquad \begin{cases} y = x^2 \\ z = 0 \end{cases}$

$z = 0$

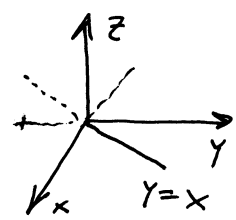
parabola u xOy ravni

b) $\vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j} = (t, t, 0)$

$x = t$

$y = t$ $\qquad \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ prava u xOy ravni

$z = 0$

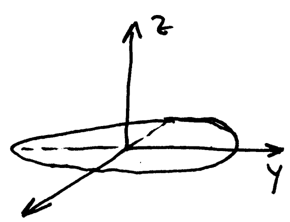


c) $\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j} = (a\cos t, b\sin t, 0)$

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ z = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{matrix} x^2 = a^2\cos^2 t \\ y^2 = b^2\sin^2 t \\ z = 0 \end{matrix}$ $\qquad$ cilj je eliminisati t

$\cos^2 t = \frac{x^2}{a^2}$, $\sin^2 t = \frac{y^2}{b^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ elipsa u xOy ravni



Pokazati da kriva

$$x = \sin 2\varphi$$
$$y = 1 - \cos 2\varphi$$
$$z = 2\cos\varphi$$

leži na sferi.

Rj.

Jednačina sfere s centrom u koordinatnom početku, poluprečnika r^2, glasi

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

U našem slučaju

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\sin 2\varphi)^2 + (1 - \cos 2\varphi)^2 + (2\cos\varphi)^2 =$$

$$= \underline{\sin^2 2\varphi} + 1 - 2\cos 2\varphi + \underline{\cos^2 2\varphi} + 4\cos^2\varphi$$

$$= 2 - 2\cos 2\varphi + 4\cos^2\varphi =$$

$$= 4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi = 4.$$

$$1 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi$$
$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$
$$\overline{1 - \cos 2\varphi = 2\sin^2\varphi}$$

Slijedi da kriva leži na centralnoj sferi poluprečnika 2, pošto njene jednačine zadovoljavaju jednačinu te sfere.

(#) Kriva L je data kao presjek dvije površi

$$L: \begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\[2mm] \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \end{cases}.$$

Krivu L napisati u parametarskom obliku.

Rj. - upute:

Presjek cilindrične površi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ i ravni $z=0$ je elipsa

$$\frac{(x-\frac{a}{2})^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{(y-\frac{b}{2})^2}{\frac{b^2}{2}} = 1$$

čije su parametarske jednačine
$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t,$$
$$y = \frac{b}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\sin t$$
$$t \in [0, 2\pi]$$

Dalje, na osnovu $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ nalazimo

$$z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t$$

Prema tome

$$L: \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t \\ y = \dfrac{b}{2} + \dfrac{b}{\sqrt{2}}\sin t \\ z = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Odrediti projekciju krive $L: z = x^2 - y^2,\ x + y - z = 0$ na ravan xOy.

Rj.

$$\begin{aligned} z &= x^2 - y^2 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

Da bi odredili projekciju krive na xOy ravan potrebno je iz datog sistema eliminisati z.

$$\begin{aligned} z &= x^2 - y^2 \\ z &= x + y \end{aligned}$$

$$x^2 - y^2 = x + y$$

$$x^2 - x - y^2 - y = 0$$

$$x^2 - y^2 - (x+y) = 0$$

$$(x-y)(x+y) - (x+y) = 0$$

$$(x+y)(x-y-1) = 0$$

$$x + y = 0 \quad \text{ili} \quad x + y - 1 = 0$$

Projekcija je

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

(#) Odrediti projekciju krive $L: x=y^2+z^2,\ x-2y+4z-4=0$ na ravan yOz.

Rj.

Da bi odredili projekciju krive na yOz ravan potrebno je iz sistema

$$\frac{\begin{array}{l} x=y^2+z^2 \\ x-2y+4z-4=0 \end{array}}{}$$

eliminisati x.

$$\frac{\begin{array}{l} x=y^2+z^2 \\ x=2y-4z+4 \end{array}}{}$$

$$y^2-2y+z^2+4z-4=0$$

$$y^2-2\cdot y\cdot 1+1^2-1^2+z^2+2\cdot z\cdot 2+2^2-2^2-4=0$$

$$(y-1)^2+(z-2)^2=9$$

Projekcija je krug

$$\begin{cases} (y-1)^2+(z-2)^2=3 \\ x=0 \end{cases}$$

(#) Data je kriva

$$L: \; x = a\cos^2 u, \quad y = a\sin u\cos u, \quad z = a\sin u$$

a) Pokazati da kriva L leži u presjeku jedne lopte i cilindra čija je generatrisa paralelna osi Oz i odrediti jednačine tih površi.

b) Odrediti jednačinu oskulatorne ravni krive L za $u = \frac{\pi}{2}$.

Rj. a) Primjetimo da je

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2\cos^4 u + a^2\sin^2 u\cos^2 u + a^2\sin^2 u =$$

$$= a^2\cos^2 u \underbrace{(\cos^2 u + \sin^2 u)}_{=1} + a^2\sin^2 u =$$

$$= a^2(\cos^2 u + \sin^2 u) = a^2$$

tj. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ – jednačina sfere

i

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^4 u + a^2\sin^2 u\cos^2 u = a^2\cos^2 u(\cos^2 u + \sin^2 u)$$

$$= a^2\cos^2 u = a \cdot \underbrace{a\cos^2 u}_{x} = ax$$

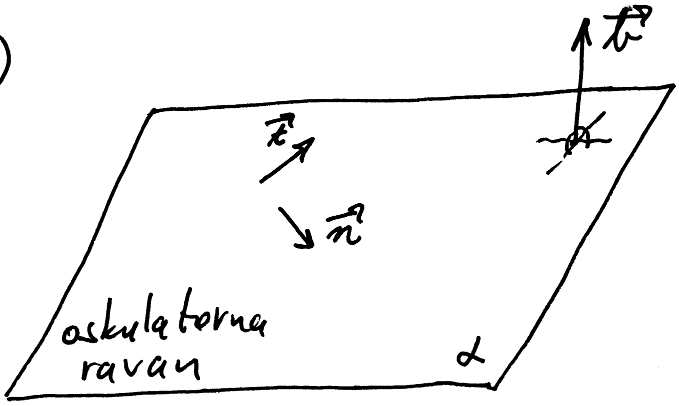
tj.

$x^2 + y^2 = ax$ – jednačina cilindrične površi čija je generatrisa paralelna osi Oz.

Vidimo da je kriva L određena presjekom ove dvije površi.

$$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$$

b)



$$\vec b = \dot{\vec r}\times\ddot{\vec r}$$

$$\dot{\vec r} = \{-2a\sin u\cos u,\ a(\cos^2 u-\sin^2 u),\ a\cos u\}$$

$$\ddot{\vec r} = \{-2a\cos 2u,\ -2a\sin 2u,\ -a\sin u\}$$

Za $u=\frac{\pi}{2}$ je

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec r}&=(0,-a,0)\\ \ddot{\vec r}&=(2a,0,-a)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{\vec r}\times\ddot{\vec r} = \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & -a & 0\\ 2a & 0 & -a\end{vmatrix} = (a^2, 0, 2a^2)$$

$$\vec r=(0,0,a)$$

Vidimo da je $M(0,0,a)$ proizvoljna tačka krive

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

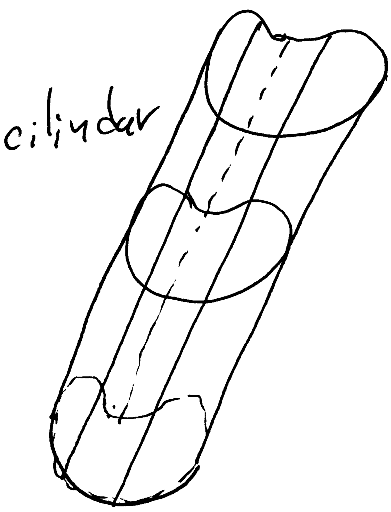
$$a^2(x-0)+0\cdot(y-0)+2a^2(z-a)=0 \qquad /:a^2$$

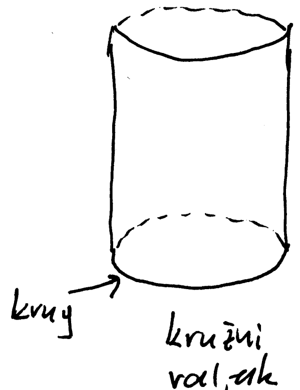
$$x+2z-2a=0$$

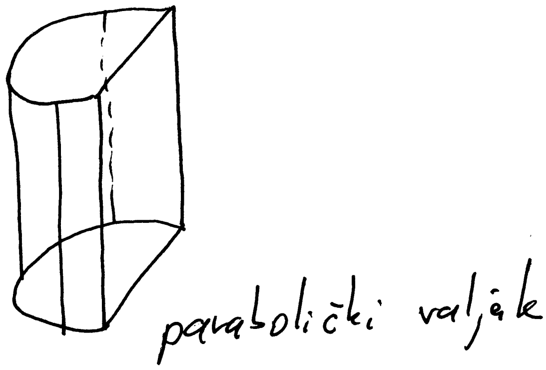
je tražena jednačina oskulatorne ravni

(#) Pokazati da je kriva $\vec{r} = \sin 2t\,\vec{i} + (1-\cos 2t)\,\vec{j} + 2\cos t\,\vec{k}$ presjek paraboličkog i kružnog valjka (cilindra).

Rj. valjak ili cilindar







$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$(x-a)^2 + (z-b)^2 = r^2$

... i ostale kombinacije

$y = ax^2 + bx + c$

$x = ay^2 + bx + c$

$z = ax^2 + bx + c$

i ostale kombinacije

$x = \sin 2t$

$y = 1 - \cos 2t$

$z = 2\cos t$

$y - 1 = 1 - \cos 2t - 1 = \cos 2t$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$

iz ovoga vidimo da data kriva pripada kružnom valjku

$y = 1 - \cos 2t$

$\frac{y}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$

$\frac{y}{2} = \sin^2 t$

$$\frac{\begin{array}{l} 1 = \sin^2 t + \cos^2 t \\ \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \end{array}}{1 - \cos 2t = 2\sin^2 t}$$

$\frac{y}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{y}{2} + \frac{z^2}{4} = 1 \quad / \cdot 4$

$2y + z^2 = 4$

$2y = -z^2 + 4$

$y = -\frac{1}{2}z^2 + 2$ iz ovoga vidimo da data kriva pripada paraboličkom valjku.

(#) Data je kriva linija $\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c}$ ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ konstantni vektori), $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Pokazati da kriva leži u ravni.

Opute:

$\vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$(\vec{r} - \vec{c})(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

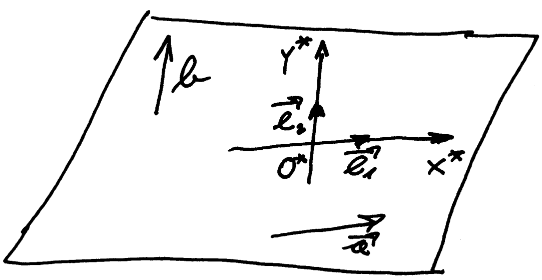
$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

pogledati prethodni zadatak

$$\begin{vmatrix} x(t) - c_1 & y(t) - c_2 & z(t) - c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

(#) Data je kriva linija $\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c}$ ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ konstantni vektori), $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Objasniti o kojoj je krivoj riječ, ako se zna da je kriva u ravni određena vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$?

Opute:



$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}_0$

$\vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$ $\qquad \vec{a} = |\vec{a}|\vec{e}_1 = a\vec{e}_1$

$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$

$\vec{r} - \vec{c}$ je kriva

$$\vec{r} - \vec{c} : \begin{cases} x^* = at^2 + b_1 t \\ y^* = b_2 t \\ t \in R \end{cases} \quad \ldots \quad ab_2 \neq 0 \quad \ldots \quad x^* = \frac{a}{b_2} y^{*2} + \frac{b_1}{b_2} y^*$$

jednačina parabole

(#) Data je kriva linija

$$\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c} \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ konstantni vektori}).$$

Pokazati da kriva leži u ravni, čiju jednačinu treba odrediti. Utvrditi o kojoj je krivoj riječ.

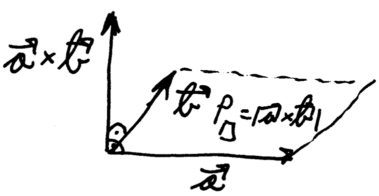
Rj.

$\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c}$ je vektorska jednačina krive

Za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ moguć je tačno jedan od sljedeća dva slučaja
1° $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni
2° $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni

1° $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni.

Šta znamo za vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ u ovom slučaju?



Pomnožimo vektorsku jednačinu krive skalarno vektorom $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c})\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})}_{\text{ovo je vektor } \perp a \text{ i } \perp b}$$

$$\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{r}(\vec{a}\times\vec{b}) - \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$$

$$(\vec{r}-\vec{c})(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$$

Znamo da $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_2)$ i $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.
Vektorskoj f-ji $\vec{r}$ možemo pridružiti određen skup tačaka $\vec{r} = (x, y, z)$ gdje su $x = x(s)$, $y = y(s)$ i $z = z(s)$ f-je koje zavise o parametru $s \in \mathbb{R}$.

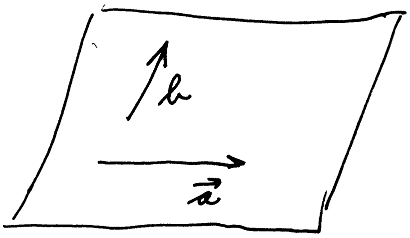
Sada

$$\underbrace{(\vec{r}-\vec{c})}_{\substack{\text{vektor} \\ \text{(može se tumačiti} \\ \text{kao vektor)}}}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-c_1 & y-c_2 & z-c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}_{=A}(x-c_1) - \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}_{=B}(y-c_2) + \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}_{=C}(z-c_3) = 0$$

jednačina ravni koja se traži

O kojoj je krivoj riječ? Znamo da se kriva nalazi u ravni.



Odredimo jedinične međusobno ortogonalne vektore $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ u ravni vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Za $\vec{e_1}$ uzmimo $\vec{e_1} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}_0$

$$\vec{r} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c}$$
$$\vec{r} - \vec{c} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t$$

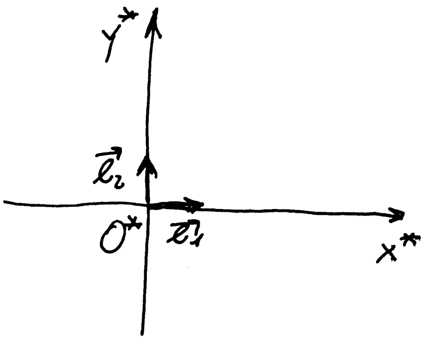
Znamo $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{e_1}$

i znamo da $\exists\, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

$$\vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$$

Označimo $|\vec{a}|$ sa a.

$$\vec{r} - \vec{c} = t^2 a\vec{e_1} + t(b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2})$$
$$\vec{r} - \vec{c} = (at^2 + b_1 t)\vec{e_1} + b_2 t\,\vec{e_2}$$



$\vec{r}$ je kriva u ravni, $\vec{r}-\vec{c}$ je i dalje kriva. Ako posmatramo koordinatni sistem $x^*O^*y^*$, gdje su koordinatne ose određene vektorima $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$, jednačina krive $\vec{r}-\vec{c}$ glasi

$$\vec{r}-\vec{c}: \begin{cases} x^* = at^2 + b_1 t \\ y^* = b_2 t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

U koordinatnom sistemu $x^*O^*y^*$ koordinate vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su $\vec{a} = (a, 0)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} a & 0 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

Kako je $|\vec{a} \times \vec{b}| \neq 0$ to je $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ a time i $ab_2 \neq 0$

pa se može odrediti $t = \dfrac{y^*}{b_2}$. Sad ako t uvrstimo u $x^* = at^2 + b_1 t$

imamo
$$x^* = a\left(\frac{y^*}{b_2}\right)^2 + b_1\left(\frac{y^*}{b_2}\right)$$

$$x^* = \frac{a}{b^2}\, {y^*}^2 + \frac{b_1}{b_2}\, y^*$$

ovo je jednačina parabole

$$x^* = d_1 {y^*}^2 + d_2 y^*$$

$$x = ay^2 + by + c$$

$a<0$ $\quad$ $a>0$

Riječ je o je jednačini parabole.

2° $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni vektori

a) Tada $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ $(\vec{b} \neq 0)$

ili

b) $\vec{b} = 0$

U ovom slučaju jednačina krive je

$$\vec{r} = \lambda \vec{b}\, t^2 + \vec{b}\, t + \vec{c}$$

$$\vec{r} = (\lambda t^2 + t)\, \vec{b} + \vec{c}$$

za $\lambda = 0$ ovo je jednačina prave

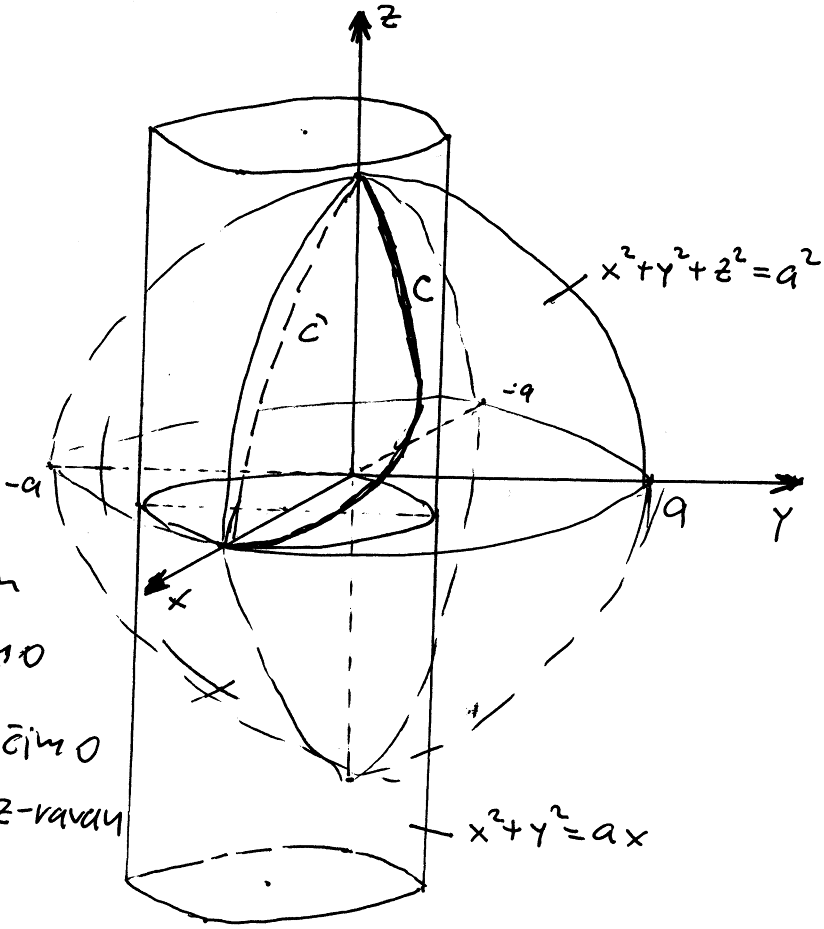
za $\lambda \neq 0$ ovo je jednačina poluprave

U ovom slučaju jednačina krive je

$$\vec{r} = \vec{a}\, t^2 + \vec{c}$$

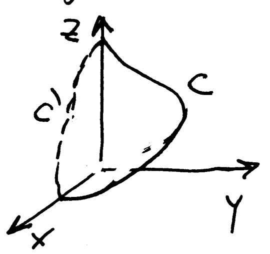
ovo je jednačina poluprave

(#) Kriva je određena kao presjek sfere
$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad \text{i cilindra} \quad x^2+y^2=ax.$$
Pokazati da je projekcija krive na xOz-ravan dio parabole. Napisati jednačinu krive u parametarskom obliku.



Rj.
$$x^2+y^2=ax$$
$$x^2-ax+y^2=0$$
$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}+y^2=\frac{a^2}{4}$$
$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Krivu određenu presjekom sfere i cilindra označimo sa C, a sa C' označimo presjek krive C na xOz-ravan



$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$$

Projekciju C' krive C na xOz-ravan dobićemo kada iz jednačine krive C na neki način eliminišemo Y (ovo nije isto kao kad stavimo $Y=0$) → ŠTA SE DOBIJE KAD UVRSTIMO $Y=0$?

$$\begin{array}{rl} & x^2+y^2+z^2=a^2 \\ - & x^2+y^2 \quad\;\; =ax \\ \hline & z^2=a^2-ax \end{array}$$
$$ax=-z^2+a^2 \quad /:a$$
$$x=-\frac{1}{a}z^2+a$$

$$x=-\frac{1}{a}z^2+a$$
ovo je jednačina parabole

u našem slučaju $0\le x\le a$

ovo je dio parabole.

Kako parametrizirati datu krivu?

$$C: \begin{cases} \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4} \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases}$$

U ravan možemo uvesti polarne koordinate pa ćemo na osnovu formula izvući formulu za z.

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t$$
$$y=\frac{a}{2}\sin t$$

$$z^2=a^2-x^2-y^2=a^2-\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\cos t+\frac{a^2}{4}\cos^2 t+\frac{a^2}{4}\sin^2 t\right)$$
$$=a^2-\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\cos t\right)=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\cos t$$

$$z^2=\frac{a^2}{2}(1-\cos t)=\frac{a^2}{2}\left(\underbrace{\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}}_{=1}-\underbrace{\left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)}_{=\cos t}\right)$$

$$z^2=a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$z=a\sin\frac{t}{2} \qquad t\in(0,2\pi)$$

Parametarske jednačine krive C su dakle

$$C: \begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t \\ z=a\sin\frac{t}{2} \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$$

Ako umjesto $\frac{t}{2}$ pišemo t ovo je ekvivalentno sa

$$C: \begin{cases} x=a\cos^2 t \\ y=a\sin t\cos t \\ z=a\sin t \\ 0\le t\le 2\pi \end{cases}$$